استفاده از روش‌های نظریه گراف‌ها برای بهبود خوش وضعی ماتریس نرمی سازه ها*

فرزاد شفیعی دیزجی [۱]		مصطفی خانزادی [۲]

چکیده در تحلیل رایانه‌ای سازه‌ها، تحلیل باید به‌صورتی انجام پذیرد که علاوه بر کاهش فضای کامپیوتر و زمان اجرای محاسباتی کامپیوتر، خطاهای محاسباتی نیز به کم‌ترین مقدار ممکن برسد. این امر با تشکیل ماتریس‌های سازه‌ای مناسب که در حین پر صفر و خوش ساختار بودن، خوش حالت نیز می‌باشد، تحقق خواهد یافت. این یک مسأله‌ی بهینه‌سازی، چندمنظوره خواهد بود. در این مقاله بر روی خطاهای محاسباتی، اعم از خطاهای گرد کردن و ... در تشکیل ماتریس نرمی سازه و کاهش این خطاها با ارائه الگوریتم‌های مناسب، پایدار و کارا تأکید شده است. زمانی که به دلیل ساختارهای به‌خصوصی، ماتریس نرمی به‌صورت بد وضع درمی آید خطاهای محاسبات افزایش می‌یابند. این حالت در سازه‌های دارای اعضای با سختی‌های متفاوت مشهودتر است. استفاده از اعضای ضعیف، سبب ایجاد درایه‌های بزرگ غیر قطری در ماتریس نرمی می‌شود که نتیجه‌ی آن ایجاد بد وضعی ماتریس نرمی است. در محاسبات عددی، بد وضعی یک ماتریس را با جابه‌جایی سطرها و یا جایگزین کردن چند سطر، بهبود می‌بخشند. در این نوشته سعی بر این است که تغییرات فوق، قبل از تشکیل ماتریس نرمی، تشخیص داده شده و اعمال گردند. برای این منظور از خصوصیات توپولوژیکی و جبری ساده در تحلیل، به طور مؤثر استفاده می‌گردد و این امر با معرفی پایه چرخه‌هایی با خواص ویژه صورت می‌پذیرد که منجر به تشکیل ماتریس نرمی با شرایط موزونی شبه بهینه شده و در نتیجه خطاهای محاسباتی به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی نظریه گراف‌ها، روش نیرو، خوش وضعی ماتریس‌های سازه‌ای

Graph Theoretical Methods for improving The conditioning of Flexibility Matrix of Structures

F.S.Dizaji		M.Khanzadi

Abstract *In addition to reducing the size and time of analyses, reduction of analytical errors is one of the most important considerations in ideal analysis of skeletal structures by computer. Appropriate matrixes with more zeros (sparse), well structure, and well condition are helpful for this aim. Therefore, an optimizing problem with multiple objectives will be considered.The objective of this research is reducing the analytical errors such as rounding errors in flexibility matrixes of skeletal structures by performing more constant and proper algorithm. These errors increase in special structures with unsuitable flexibility matrixes; the structures with different stiffnesses are one of the most prevalent examples for this case.Use of weak elements leads into high non-diagonal terms in flexibility matrix, which result in analytical errors. In numerical analysis, ill-condition of a matrix is soluble by movement or substitution of the rows; then specification and implementation of these changes before forming the flexibility matrix has been studied. By identifying cycle bases with specific qualities, simple typological and algebraic properties have been used basically in analyses for this purpose. In conclusion, stiffness matrixes with optimally condition number are obtainable and analytical errors reduce.*

Key Words Graph Theory Methods, Force Method, Well Conditioning of Structural Matrices

* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۶/۶/۲۷ و نسخه‌ی نهایی آن در تاریخ ۸۸/۹/۸ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده‌ی مسئول، کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، نارمک، تهران

(۲) استادیار، دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، نارمک، تهران

مقدمه

استفاده از رایانه‌های عددی برای حل مسائل سازه‌ای نیاز به حل یک سیستم بزرگ معادله‌ی جبری به‌صورت زیر است:

$$Ax = b \qquad (۱)$$

معادله‌ی (۱) هم برای روش نیروها و هم برای روش تغییر مکان‌ها باید حل گردد. بعضی وقت‌ها جواب معادله‌ی (۱) با تغییرات اندک در درایه‌های ماتریس A ویا b ویا هردو، تغییرقابل توجهی می‌کند. در این صورت گفته می‌شود ماتریس A نسبت به این حل، بد حالت است، دقت حل معادله‌ی (۱) می‌تواند به مشخصات ماتریس A حساس باشد؛ بنابراین مطالعه‌ی این مشخصات و رابطه‌ی آن‌ها با منبع انتشار و پخش خطاهای ممکن حائز اهمیت است. بدین منظور روش‌های بهتر فرمول‌بندی مسأله باید پیدا شود و تکنیک‌هایی برای پیشگویی،کشف وکمینه کردن خطاهای حل، باید مورد توجه قرار گیرد. بد حالتی ماتریس نرمی و ماتریس سختی سازه برای روش نیروها و روش سختی توسط کاوه [1-2] مطالعه شده است. هم‌چنین بد حالتی ماتریس سختی سازه برای روش سختی به وسیله‌ی شاه [3] مطالعه شده است. در کار وی روش‌هایی برای بهبود خوش وضعی ماتریس سختی سازه داده شده است. یک تحقیق ریاضی از تحلیل خطای ماتریس مربوط به روزانف و گنزبرگ [4] است. در کار ایشان نشان داده شده که معادلات ناپایدار عددی ممکن است از مسائل پایدار فیزیکی ناشی شوند. اثر زیر سازه‌ها روی شرایط ماتریس سختی به‌وسیله‌ی گرومز و راو [5] تحقیق شده، این نتیجه به‌دست آمده که زیر سازه‌ها به طور عمده روی دقت حل سیستم‌های بد حالت تأثیری ندارند. فیلهو [6] یک روش متعامد سازی برای بهترین شرایط ماتریس نرمی وسختی پیشنهاد کرد؛ هر چند این یک روش غیر عملی برای سازه‌های پیچیده با اعضای زیاد است. بهینه سازی شرایط معادلات تعادل، درزمانی‌که یک روش جبری به‌کار رود، به‌وسیله‌ی رابینسون و هاگنماخر [7] مطالعه شده است. اخیراً روش‌هایی برای انتخاب انواع ویژه پایه‌های استاتیکی و سینماتیکی که منجر به خوش حالتی ماتریس نرمی و سختی سازه نسبت به پایه‌های کلاسیک گردیده است، توسط کاوه [1] گسترش یافته است.

روش نیروها

تحلیل سازه‌ها به روش نیروها که در آن نیروهای اعضاء به‌عنوان مجهول به‌کار می‌روند، از این نظر جذاب است که خواص اعضاء، یک سازه و طراحی آن‌ها غالباً به نیروهای اعضاء بیشتر از جابه‌جایی گره‌ها بستگی دارد. این روش تا سال ۱۹٦۰ کاربرد زیادی داشت. با ظهور رایانه و مناسب بودن روش تغییر مکان‌ها برای رایانه‌ای شدن، اکثر محققین مجذوب روش تغییر مکان‌ها شدند و در نتیجه روش نیرو و بهینه کردن آن دچار فراموشی شد.

چهار طریق مختلف برای تحلیل سازه‌ها به روش نیروها اتخاذ شده است که عبارتند از:

۱. روش‌های توپولوژیکی،
۲. روش‌های جبری،
۳. روش‌های مختلط توپولوژیکی- جبری،
٤. روش مجتمع.

روش‌های توپولوژیکی به‌وسیله‌ی ماندر[9] هندرسن [8] برای اسکلت‌های ساختمانی با گره صلب با به‌کار بردن انتخاب دستی برای پایه چرخه‌های مدل گراف آن‌ها توسعه داده شده است. روش‌های مناسبی برای رایانه‌ای کردن آن‌ها توسط کاوه [10,11] ارائه شده است. این روش‌های توپولوژیکی برای کلیه‌ی اسکلت‌های ساختمانی تعمیم داده شده است. به‌عنوان مثال، برای قاب‌های صلب، خرپاهای مستوی مفصلی و خرپاهای فضایی [11].

روش جبری توسط کانکو وهم‌کاران [15] توپسو [14] رابینسون وهم‌کارانش [13] دنکه [12] توسعه داده شده است و روش‌های مختلط توپولوژیکی- جبری به‌وسیله‌ی گیلبرت و هم‌کارانش[16]؛ کلمن و پوتن

[18,19] و پوتن [17] به‌کار گرفته شده است.

روش مجتمع نیروها به‌وسیله‌ی پتنایک [20-22] توسعه داده شده است که در آن معادلات تعادل و شرایط سازگاری به طور هم‌زمان برحسب متغیرهای نیرویی بیان شده‌اند. در این فصل، روش‌های توپولوژیکی که از مفاهیم کلی تئوری گراف‌ها استفاده می‌کنند، ارائه شده است. در این قسمت، فرمول ماتریسی که بر اساس معادلات تعادل نیروها، سازگاری تغییر مکان‌ها و روابط بین نیروها و تغییر شکل‌ها استوار است، شرح داده می‌شود. یک سازه A با عضو M و N گره، که $\gamma(S)$ درجه‌ی نامعینی استاتیکی (DSI) دارد را در نظر بگیرید. تعداد $\gamma(S)$ نیروی مجهول مستقل را به‌عنوان مجهول اضافی انتخاب کنید. این نیروهای مجهول را می‌توان از عکس‌العمل‌های خارجی و یا نیروهای داخلی سازه انتخاب کرد. مجهول‌های اضافی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q=\{q_1, q_2, ..., q_{\gamma(s)}\}^t \quad (۲)$$

قیود مربوط به مجهول‌های اضافی را برای تعیین یک سازه معین استاتیکی که به‌عنوان سازه پایه S (آزاد شده یا مقدماتی) شناخته می‌شود، از بین ببرید. بدیهی است که یک سازه پایه، بایستی پایدار باشد. بارهای گره‌ای را می‌توان با عبارت زیر تعریف کرد:

$$p=\{p_1, p_2, ..., p_n\}^t \quad (۳)$$

بدین علت که بارها فقط در بعضی از گره‌ها ممکن است اثر کنند، به‌جای N، n به‌کار رفته است. حال نتایج توزیع تنش به سبب وارد آمدن بار p برای یک تحلیل خطی به‌وسیله‌ی روش نیرو را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$r = B_0p + B_1q \quad (٤)$$

که B_0 و B_1 ماتریس‌های مستطیلی شکل‌اند و هر کدام M سطر و به ترتیب N و $\gamma(S)$ ستون دارند. B_0P که به‌عنوان یک حل خصوصی شناخته می‌شود. تعادل را ارضا می‌کند و توسط بارها وضع می‌شود و B_1q که حل مکمل یک مجموعه حداکثر از سیستم‌های خود متعادل تنش (S.E.Ss) است، به‌عنوان یک پایه استاتیکی شناخته می‌شود. ستون‌های B_1 یک پایه‌ی استاتیکی S را تشکیل می‌دهند. توجه کنید که بر روی هر چرخه سه سیستم خود متعادل برای قاب مستوی می‌توان تشکیل داد.

یک سازه‌ی پایه لازم نیست به‌صورت یک سازه‌ی معین انتخاب شود. برای یک مجهول اضافی سازه پایه، می‌توان اطلاعات لازم را یا به‌وسیله‌ی تحلیل اولیه برای بارهای p و واکنش‌های $q_i = (i=1,2,...,\delta(S))$ یا به‌وسیله‌ی استفاده از اطلاعات موجود تهیه کرد.

معادلات سازگاری در سازه‌های حقیقی حال ساخته می‌شود. با به‌کار بردن نسبت بار، تغییر مکان برای هر عضو و جمع‌آوری آن‌ها در قطر ماتریس نرمی مجزا، F_m می‌توان نوشت:

$$u = F_mr = F_mB_0p + F_mB_1q \quad (٥)$$

معادله‌ی بالا را می‌توان در یک شکل تقسیم‌بندی شده‌ی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^t \\ B_1^t \end{bmatrix} [F_m][B_0 \quad B_1]\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (٦)$$

که v_0؛ شامل تغییر مکان مربوط به اجزاء نیروهای p می‌باشد و v_c؛ تغییر مکان نسبی برش‌ها را برای سازه پایه مشخص می‌کند. با انجام ضرب می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^tF_mB_0 & B_0^tF_mB_1 \\ B_1^tF_mB_0 & B_1^tFmB_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (٧)$$

یا:

$$v_0 = (B_0^tF_mB_0)p + (B_0^tF_mB_1)q \quad (٨)$$

و:

$$vc = (B_1^tF_mB_0)p + (B_1^tF_mB_1)q \quad (٩)$$

حال با اعمال شرایط سازگاری داریم:

$$v_c = 0 \quad (١٠)$$

با تلفیق معادله‌ی بالا با معادله‌ی (۹) داریم:

$$q = -(B_1^tF_mB_1)^{-1}(B_1^tF_mB_0)p \quad (١١)$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی (۸) داریم:

$$v_0 = \left[B_0^tF_mB_0 - (B_1^tF_mB_1)^{-1}B_1^tF_mB_0\right]p \quad (١٢)$$

و نتایج تنش در یک سازه را می‌توان به‌صورت زیر

نوشت:

$$r = \left[B_0 - B_1 (B_1^t F_m B_1)^{-1} B_1^t F_m B_0 \right] p \qquad (۱۳)$$

که $G = B_1^t F_m B_1$ به ماتریس نرمی یک سازه موسوم است. شرایط یک تحلیل بهینه به روش نیروها این است که ماتریس نرمی G دارای شرایط زیر باشد:

۱. تُنُک باشد،
۲. خوش حالت باشد،
۳. خوش ساختار باشد (به‌عنوان مثال پهنای باند کمی داشته باشد).

برای دسترسی به شرایط ۱ و ۲، ساختار B_1 بایستی به خوبی طراحی شود؛ زیرا ساختار F_m برای هر مسأله خاص قابل تغییر نیست. شرط سوم دارای ذات ترکیباتی می‌باشد. در این مقاله، خاصیت دوم مطالعه می‌شود.

ماتریس B_1 که شامل پایه‌های استاتیکی می‌باشد، دارای الگوئی مشابه با ماتریس C^t است (که C^t ماتریس مجاورت چرخه عضو می‌باشد) به طور مشابه ماتریس $G = B_1^t F_m B_1$ معادل بهینه کردن ماتریس همسایگی پایه‌های چرخه‌های گراف، CC^t می‌باشد. این تبدیلات، مزایای بسیاری دارند از قبیل:

۱. مرتبه‌ی ماتریس CC^t کوچکتر از مرتبه‌ی G می‌باشد. برای یک سازه‌ی فضایی مرتبه‌ی ماتریس CC^t شش بار، و برای یک سازه‌ی دوبعدی، سه بار کوچکتر از مرتبه‌ی G می‌باشد.
۲. درایه‌های ماتریس‌های C و CC^t اعضای Z_2 (مجموعه اعداد صحیح تشکیل شده از صفر و یک) می‌باشند. پس کار بر روی آن‌ها بسیار راحت‌تر از B_1 و G خواهد بود؛ زیرا درایه‌های B_1 و G اعداد حقیقی می‌باشند.
۳. پیشرفت‌های به‌دست آمده در ریاضیات ترکیباتی و تئوری گراف به طور مستقیم قابل استفاده خواهند بود.
٤. تناظر بین روش‌های تحلیل جبری و ترکیباتی پایدارتر می‌شود.

همان‌طور که مشاهده شد، برای دستیابی به یک تحلیل بهینه، مسأله‌ی تأمین شرایط تحلیل بهینه برای G به مسأله تأمین شرایط مذکور برای CC^t تبدیل می‌شود. این بدان معنی است که حتی قبل از این که به تحلیل یک سازه پرداخته شود با بررسی چرخه‌های پایه‌ی انتخاب شده می‌توان بهینگی تحلیل را مشخص نمود. از طرفی برای دستیابی به یک تحلیل بهینه، بایستی پایه‌ی چرخه‌های مناسبی انتخاب نمود. هم الگویی پایه استاتیکی یک سازه اسکلتی و یک پایه چرخه‌ی مدل گرافی آن دیده شد. روش‌های موثر برای انتخاب یک پایه چرخه هم الگو برای پرصفر کردن ماتریس B_1 توسط کاوه [26-25-11]، کسل وهم‌کاران [24] هوبیکا و سیسلو [23] گسترش یافته است. الگوریتم‌هایی برای مرتب کردن المان‌های پایه‌های انتخاب شده که منجر به کم عرضی ماتریس نرمی می‌شود توسط کاوه [28-27] مطالعه شده است.

پایه چرخه‌های کمینه و بهینه

همان‌طور که می‌دانیم، ماتریسی تُنُک نامیده می‌شود که تعداد زیادی از درایه‌های آن صفر باشد. اهمیت تنکی از این لحاظ است که کار کردن با ماتریس‌های تنک، باعث صرفه‌جویی در زمان محاسباتی رایانه می‌شود. از طرفی اکثر ماتریس‌هایی که در تحلیل سازه‌های عملی به‌دست می‌آیند می‌توانند تنک شوند؛ حتی اگر چنین نباشند. «ضریب تنکی» χ برای یک ماتریس به‌صورت تعداد درایه‌های غیر صفر آن تعریف می‌شود.

پایه‌های چرخه کمینه. پایه چرخه‌هایی به‌صورت $C = \{C_1, C_2, ..., C_{\chi(s)}\}$ پایه چرخه‌های کمینه نامیده می‌شود، در صورتی که مقدار زیر کمینه شود:

$$L(C) = \sum_{i=1}^{b_1(S)} L(C_i) \qquad (١٤)$$

واضح است که $\chi(C) = L(C)$ پس یافتن یک پایه چرخه‌های کمینه متناظر با یافتن تنک‌ترین ماتریس C و از طرفی یافتن تنک‌ترین ماتریس G می‌باشد.

پایه چرخه‌های شبه کمینه. پایه چرخه‌هایی که $L(C)$ مقدار نزدیک به کمینه دارد، پایه چرخه‌های شبه کمینه نامیده می‌شود.

پایه چرخه‌های بهینه. پایه چرخه‌هایی که منجر به تنکی ماتریس همسایگی پایه چرخه‌ها CC^t می‌شوند، پایه چرخه‌های بهینه نامیده می‌شوند. بدیهی است چنین پایه‌هایی دارای کم‌ترین هم‌پوشانی هستند.

پایه چرخه‌های شبه بهینه. اگر $\chi(CC^t)$ از مقدار مینیمم کمی بیشتر باشد، چنین پایه‌ای را شبه بهینه می‌نامند.

ضریب اشتراک ماتریس همسایگی سیکل عضو برای سطر iام برابر تعداد سطرهای jام می‌باشد، به طوری که دو شرط زیر برای سطر jام احراز شوند:

$$j \in \{i+1, i+2, ..., b_1(S)\} \qquad (۱۵)$$

شرط دوم به این معنی است که حداقل یک k پیدا شود که هر دو چرخه C_i و C_j شامل عضو m_k باشند و به بیان ماتریسی سطرهای iام و jام ماتریس مجاورت چرخه عضو در ستون k درایه غیر صفر داشته باشند. به‌عنوان یک نتیجه $C_{b_1(S)}$ همواره برابر صفر است. نتیجه‌ی مستقیم تعریف اخیر به‌صورت رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود:

$$\chi(CC^t) = b_1(S) + 2\sum_{i=1}^{b_1(S)-1} \sigma_i(C) \qquad (۱۶)$$

جمله $b_1(S)$ نشان دهنده‌ی مجاورت هر چرخه با خودش می‌باشد. ضریب ۲ در جمله‌ی دوم به‌علت تقارن ماتریس CC^t وارد شده است و حاصل جمع $\sigma_i(C)$ نشان دهنده‌ی مجموع تعداد چرخه‌هایی است که با چرخه‌ی iام عضو مشترک دارند. پس $2\sum_{i=1}^{b_1(S)-1}$ برابر تعداد اعضایی غیر صفر و غیر قطری ماتریس CC^t خواهد بود. از آن‌جایی‌که $b_1(S)$ برای سازه‌ی معلوم، مقدار معلومی می‌باشد، بنابراین تنک کردن ماتریس CC^t تنها با مینیمم کردن مقدار $\sum_{i=1}^{b_1(S)-1} \sigma_i(C)$ میسرخواهد بود یعنی چرخه‌ها طوری انتخاب شوند که همپوشانی کمی داشته باشند. روش‌های انتخاب چنین پایه چرخه‌هایی توسط کاوه [31-30-29-26-25] گسترش یافته است.

با توجه به مطالب ذکر شده، مناسب‌ترین نوع چرخه‌هایی که برای روش نیروها می‌توان انتخاب کرد، چرخه‌های بهینه می‌باشند؛ ولی به دودلیل عمده‌ی زیر، اکثر تحقیقات انجام شده بر روی چرخه‌های کمینه متمرکز شده است:

۱. اکثر الگوریتم‌های انتخاب چرخه‌های بهینه پیچیده می‌باشند و از نظر زمان محاسباتی رایانه مطلوب نمی‌باشند.
۲. در اکثر سازه‌های عملی، انتخاب سیکل‌های کمینه منجر به تشکیل چرخه‌های بهینه نیز می‌شود.

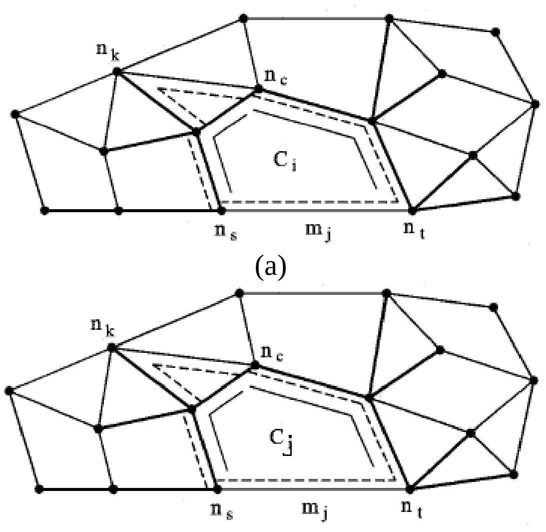
انتخاب پایه چرخه‌ها

پایه چرخه‌های یک گراف کاربرد زیادی در زمینه‌های گوناگون مهندسی دارد. میزان کارآیی هر یک از این کاربردها به پایه چرخه‌ی انتخاب شده بستگی دارد. یک پایه با چرخه‌های کوتاه‌تر زمان و حافظه‌ی مورد نیاز را برای بعضی از کاربردها کاهش می‌دهد. یعنی انتخاب یک پایه چرخه‌ی حداقل، مطلوب است و برای کاربردهای دیگری چرخه‌های با تقاطع حداقل مورد نیاز است؛ یعنی پایه چرخه‌های بهینه ترجیح داده می‌شود. پایه چرخه‌ی حداقل در ابتدا توسط اشتپان [32] مورد بررسی قرار گرفت و توسط زیکوو[33] اصلاح گردید. الگوریتم‌های عملی برای انتخاب پایه چرخه‌های نزدیک به حداقل توسط کاوه [11] و کسل وهم‌کاران [24] توسعه داده شد. روش‌های مشابهی برای تشکیل پایه چرخه حداقل یک گراف توسط سیسلو و هابیکا [23] ادعا شد. یک تخمین مشابهی به‌وسیله‌ی کاوه [34] برای گراف‌های مستوی ساخته شد؛ با وجود این، نمونه‌ی متقابلی هم برای گراف‌های فضایی داده شد. کولاسینسکو [35] یک نمونه‌ی متقابلی برای الگوریتم‌های سیسلو و هابیکا یافت. اخیراً هورتون [36] یک الگوریتم از رتبه‌ی چند جمله‌ای برای یافتن پایه چرخه‌های حداقل گراف‌ها معرفی کرده است.

تشکیل یک چرخه حداقل روی یک عضو. یک چرخه C_i با طول حداقل روی یک عضو m_j که مولد نام دارد را می‌توان با استفاده از الگوریتم SRT کاوه به شرح زیر

تشکیل داد:

دو SRT از دو گره انتهای n_s و n_t عضو m_j تشکیل دهید و جریان را به برخورد دو SRT با یکدیگر (عضو m_j شامل SRT نباشد) محدود کنید. جمع کوتاه‌ترین مسیر بین n_s و n_c، n_t و n_c و عضو m_j یک چرخه حداقل C_i را روی m_j تشکیل می‌دهد. با استفاده از این الگوریتم‌ها طول‌ها را هم می‌توان محاسبه نمود. برای مثال، C_iیک چرخه‌ی حداقل روی m_j می‌باشد؛ شکل(۱). SRT ها با خط کلفت نمایش داده شده‌اند. به محض این که n_c پیدا شود مراحل تولید SRT قطع می‌گردد شکل(a:۱).



شکل ۱ یک سیکل حداقل روی یک عضو

به طور مشابه می‌توان یک چرخه‌ی حداقل، روی عضو m_j که از گره n_k عبور می‌کند، تولید کرد. یک SRT که از n_k شروع می‌شود، تشکیل دهید و به محض این که به دو گروه انتهایی m_j رسید، جمع کوتاه‌ترین مسیرهای پیدا شده، بین n_k و n_s، n_k و n_t با m_j چرخه‌ی مورد نظر را تشکیل می‌دهد. چرخه‌ی فوق، روی شکل(b:۱) مشخص شده است.

کنترل استقلال چرخه‌ها. هر چرخه یک گراف را می‌توان به‌عنوان بردار ستونی از ماتریس تلاقی چرخه – اعضاء، مورد بررسی قرار داد. یک روش جبری، مانند حذف گوس را می‌توان برای وارسی یک چرخه نسبت به زیر- پایه انتخاب شده‌ی قبلی به‌کار برد. به هر حال، اگرچه این روش معمول است و ترتیب عدم استقلال الگوریتم‌های انتخاب چرخه را کاهش می‌دهد، مانند خیلی از روش‌های جبری دیگر کاربرد آن نیاز به یک فضای ذخیره‌سازی قابل توجه دارد.

اغلب روش‌های معمولی گراف تئوریکی از یک درخت گسترنده S استفاده می‌کنند و پایه چرخه‌های درختی آن را تشکیل می‌دهند. این روش، خیلی ساده است؛ هر چند که معمولاً کاربرد آن چرخه‌های طولانی را نتیجه می‌دهد. این روش را می‌توان با اجازه دادن به انتخاب هر وتر به‌کار رفته در مجموعه شاخه‌های درخت انتخاب شده اصلاح کرد. تخفیف بیشتری در طول را می‌توان با تولید یک SRT از گره مرکزی گراف و به‌کار بردن این وترها به ترتیب صعودی فاصله‌ی آن‌ها از گره مرکزی به‌دست آورد. کاوه [11]

روش سوم که گراف تئوریکی می‌باشد، شامل استفاده از چرخه‌های مجاز است. به فرآیند گسترشی زیر توجه کنید:

$$C_1 = C^1 \to C^2 \to C^3 \to .... \to C^{b_1(S)} = S \qquad (۱۷)$$

که $C^k = \bigcup_{i=1}^{k} c_i$، یک چرخه C_{k+1} سیکل مجاز نامیده می‌شود. اگر برای $C^k \to C^k \bigcup c_{k+1}$، داشته باشیم:

$$b_1(C^{k+1}) = b_1(C^k \bigcup C_{k+1}) = b_1(C^k) + 1 \qquad (۱۸)$$

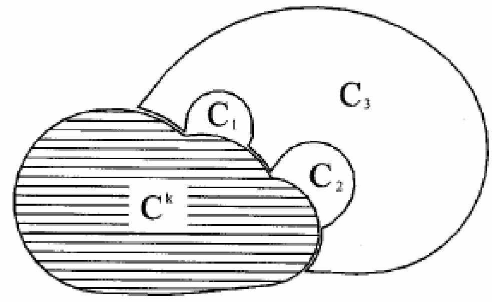
به راحتی می‌توان اثبات کرد که شرایط مجاز بودن با ارضا یکی از شرایط زیر تأمین می‌شود:

۱. $A_{k+1} = C^k \bigcap C_{k+1} = \varphi$ که φ یک تقاطع تهی است.

۲. $\bar{b}_1(A_{k+1}) = r - s$ که r و s به ترتیب تعداد مؤلفه‌های C^{k+1} و C^k است.

۳. $\bar{b}_1(A_{k+1}) = 0$ که C^{k+1} و C^k پیوسته‌اند. $(r = s)$.

در نسبت بالا $\bar{b}_1(A_i) = \bar{M}_i - \bar{N}_i + 1$ که $\bar{M}_i$ و $\bar{N}_i$ به ترتیب تعداد اعضاء و گره‌های A_i می‌باشد. برای مثال، ترتیب انتخاب سیکل در شکل (۲): با شماره آن‌ها مشخص شده است.



شکل۲ یک سیکل و سیکل‌های محصور آن

روش متفاوتی توسط سیسلو وهوبیسکا پیشنهاد شده، که:

$$b_1(C^{k+1}) = b_1(C^k) + p$$

و برای مجازبودن مورداستفاده قرار می‌گیرد. به هر حال، یک پروسه تکمیلی برای $p > 1$ انجام می‌شود. برای مثال، وقتی که C_3 به سیکل C^k اضافه می‌شود، اولین عدد بتی، کاوه [38] به اندازه‌ی ۳ افزایش پیدا می‌کند، بنابراین سیکل‌های C_1 و C_2 قبل از افزایش ثانوی در این مرحله تولید می‌شود.

در این مقاله برای وارسی استقلال چرخه‌ها از روش اول وسوم استفاده شده است.

پایه چرخه‌هایی با شرایط موزونی بهینه

به منظور بهینه کردن شرایط موزونی ماتریس‌های نرمی، پایه‌های استاتیکی مربوط به پایه چرخه‌هایی که خواص ویژه‌ای دارند باید انتخاب شود. یک پایه چرخه اگر خواص زیر را داشته باشد، به‌عنوان یک پایه چرخه با شرایط موزونی بهینه تعریف می‌شود:

(الف): پایه چرخه بهینه باشد، یعنی عناصر غیر صفر مربوط به ماتریس مجاورت چرخه‌ها حداقل باشد که به ماتریس نرمی با تنکی حداکثر منجر می‌شود.

(ب): اعضاء مشترک چرخه‌ها با بیشترین وزن باشند؛ یعنی عنصرهای غیرقطری مربوط به ماتریس نرمی کوچکترین مقدار بزرگی ممکن را داشته باشند.

یک گراف وزن‌دار ممکن است بیشتر از یک پایه چرخه‌ی بهینه داشته باشد. ارضا شرط(ب) شرایط موزونی را بهینه می‌کند. به هر حال، اگر یک چنین پایه چرخه‌ای وجود نداشته باشد، پس باید توافقی بین شرط‌های (الف)و(ب) پیدا شود. به‌عبارت دیگر، پایه‌ای را باید انتخاب نمود که به‌طور جزئی هر دو شرط بالا را ارضا کند. از آن‌جایی‌که الگوریتمی برای تشکیل پایه چرخه بهینه موجود نیست، تحقیق برای پایه چرخه‌هایی با شرایط موزونی نزدیک به بهینه انجام می‌شود. مسأله‌ی انتخاب پایه چرخه‌ی بهینه را می‌توان با شکل ریاضی زیر توضیح داد:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{b_1(\bar{S})-1} L(C^i \cap C_{i+1}) \qquad (۱۹)$$

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{b_1(\bar{S})-1} W(C^i \cap C_{i+1}) \qquad (۲۰)$$

که $\bar{S}$ انقباض یافته‌ی S است و $C^i = \bigcup_{j=1}^{i} C_j$ می‌باشد.

می‌توان دید که مسأله یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چند موضوعه است و الگوریتم‌هایی که در ادامه می‌آید، به گونه‌ای تعریف شده‌اند که هر دو تابع موضوع را به طور جزئی، همزمان ارضا کنند. کاوه [37]

خطاها. تحلیل خطا در یک محاسبه‌ی عددی، به‌وسیله‌ی دست و یا رایانه، اساسی است. مقادیر ورودی به ندرت دقیق هستند. چرا که آن‌ها در اکثر مواقع بر پایه‌ی مشاهدات و برآوردها بنا شده‌اند و از طرفی، خود روش‌های عددی، موجب انواع مختلفی از خطاها می‌شوند. قبل از شروع مطالعه‌ی موضوع خطاها، در مثال زیر به ذکر اهمیت آن‌ها می‌پردازیم:

فرض کنید بخواهیم ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 + 0.4002x + 0.00008 = 0$ را با ٤ رقم اعشار حساب کنیم. جواب به دست آمده، برابر ۰/۰۰۰۳- خواهد بود.

جواب حقیقی به‌دست آمده با دقت ۸ رقم اعشار، برابر ۰/۰۰۰۲- می‌باشد؛ بنابراین حساب با اعداد دارای ٤ رقم اعشار ایجاد خطایی برابر ۵۰٪ می‌نماید. علت پدیده‌ی مزبور، استفاده از حساب با اعداد اعشاری ٤ رقمی می‌باشد، اما نباید تصور کنیم که اعداد اعشاری ۸

رقمی تمام مسائل را حل می‌کنند.

حساسیت (بد وضعی) و ناپایداری. برخی محاسبات به خطای گرد کردن بسیار حساس می‌باشند؛ در حالی که برخی دیگر این گونه نیستند. در پاره‌ای موارد می‌توان این حساسیت را با تغییر روش محاسبه از بین برد، لیکن در بسیاری از موارد مسائل به طور ذاتی به خطای گرد کردن حساس می‌باشد. بنابراین، باید حساسیت به روش و حساسیت ذاتی را از یکدیگر متمایز ساخت.کلمه‌ی حساسیت به طور کلی به وابستگی پیوسته‌ی یک مسأله نسبت به داده‌های ورودی و یا روش آن اطلاق می‌گردد. چنانچه خطا در یک مسأله با نرخ چند برابر مرتب افزایش یابد، روش را از لحاظ عددی، ناپایدار می‌نامند.

مثال: معادله‌ی مرتبه چهار $(x-2)^4 = 0$ را از نظر بدحالتی بررسی کنید.

حل: این معادله دارای چهار ریشه‌ی یکسان x=2 می‌باشد. حال این معادله را از یک عدد بسیار کوچک مانند 10^{-8} کسر و رفتار آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$(x-2)^4 - 10^{-8} = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x0 + 15.99999999 = 0 \quad (۲۱)$$

ریشه‌های این معادله باید رابطه‌ی $(x-2)^4 = \pm 10^{-4}$ را ارضا نمایند، یعنی $(x-2) = \pm\sqrt{\pm 10^{-4}}$. بنابراین، ریشه‌های معادله عبارتند از:

$$x_1 = 2.01, x_2 = 1.99,\ x_3 = 2 + 0.01i,\quad x_4 = 2 - 0.01i$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌گردد، ریشه‌های معادله داده شده نسبت به داده‌های مسأله از قبیل یک ضریب بسیار حساس می‌باشد. این نوع رفتار تابع که مستقل از روش حل آن بوده و جزو خصوصیات ذاتی آن می‌باشد، منجر به بدحالتی سیستم می‌گردد؛ چنانچه در این‌جا ریشه‌های معادله با اندکی تغییر در ضریب ثابت آن، دچار تغییرات بسیار بزرگی گردیده‌اند. به‌طورکلی، یک ماتریس A، اگر حداقل یکی از مشخصه‌های زیر را داشته باشد، بد وضع نامیده می‌شود:

۱. تغییر کوچکی در ضرایب (عناصر ماتریس) باعث تغییرات بزرگی در جواب دستگاه شود.
۲. عناصر قطری ماتریس، نسبت به سایر عناصر آن کوچکتر باشند.
۳. مقدار $|A|.|A^{-1}|$ دقیقاً یک نشود.
٤. مقدار $[A^{-1}]^{-1}$ دقیقاً با A برابر نباشد.
٥. مقدار $[AA^{-1}]$ دقیقاً با ماتریس یکه I برابر نباشد.
٦. مقدار $[A^{-1}[(A)^{-1}]^{-1}]$ از ماتریس یکه I، بیشتر از مقدار AA^{-1} از I تفاوت داشته باشد.

در مسائلی که مقدار بد وضعی اندکی دارند، محورگیری بر افزایش دقت جواب تأثیر دارد، اما در مورد مسائلی که بد وضعی شدیدتری دارند، فقط با دقت مضاعف محاسباتی می‌توان دقت جواب را افزایش داد.

اعداد شرایط موزونی. به منظور اندازه‌گیری شرایط موزونی یک ماتریس، اعداد گوناگونی تعریف شده و به کار می‌رود. سه عدد شرایط موزونی که استفاده‌ی آن‌ها آسان است در ذیل شرح داده می‌شود؛ کاوه [38] :

الف) نسبت مقادیر ویژه‌ی حداکثر و حداقل: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به شرایط موزونی ماتریس‌ها مرتبط است. نسبت مقادیر ویژه‌ی حداکثر و حداقل یک ماتریس $|\lambda_{max}|/|\lambda_{min}|$ را می‌توان به عنوان یک عدد شرایط موزونی به کار برد. به راحتی می‌توان نشان داد که لگاریتم در مبنای ۱۰ این عدد، شرایط موزونی به طور قابل توجهی با تعداد حداکثر ارقامی که در معکوس کردن یا حل معادلات هم‌زمان از دست می‌رود، متناسب است. بنابراین تعداد ارقام خوب g، در حل معادله برابر است با:

$$g = p - \log(|\lambda_{max}|/|\lambda_{min}|) = p - PL \qquad (۲۲)$$

در این نسبت $p, PL = \log(|\lambda_{max}|/|\lambda_{min}|)$ عددی است که از یک ماشین به ماشین دیگر تغییر می‌کند. برای مثال در IBM/360 تقریباً ۸ رقم برای دقت ساده و ١٦ رقم برای دقت مضاعف می‌باشد. باید ذکر شود که برآورد بالا محافظه کارانه است و تجربه نشان داده است که PL یک رقم در جهت اطمینان است.

ب) دترمینان ماتریس نرمالیزه شده‌ی سطری: یک مقدار کارا و ساده که شرایط موزونی یک مجموعه معادلات را ارزیابی می‌کند، دترمینان ماتریس نرمالیزه شده‌ی سطری را با یک سری ضرایب دارا می‌باشد. یعنی هر سطر از

ماتریس G_i , G تقسیم می‌شود به:

$$\left[g_{i1}{}^2 + g_{i2}{}^2 + ... + g_{ii}{}^2\right]^{1/2} \quad (۲۳)$$

بزرگی دترمینان ماتریس نرمالیزه شده سطری که با PN مشخص می‌شود، معیار خوبی برای سنجش شرایط موزونی ماتریس G می‌باشد. واضح است که بزرگی این دترمینان در فاصله‌ی زیر قرار دارد:

$$0 < PN \le 1 \quad (۲٤)$$

از آن‌جایی‌که G لزوماً معین مثبت است، در ماتریس با شرایط موزونی ایده آل PN=1 می‌باشد. این مورد زمانی اتفاق می‌افتد که ماتریس متعامد یا قطری باشد؛ کاوه[38] .

ج) نسبت دترمینان‌ها: از آن‌جایی که بهترین شرایط موزونی برای معکوس کردن در یک ماتریس، قطری بودن آن می‌باشد، پارامتر زیر را می‌توان به عنوان یک معنی کاربردی برای اندازه‌گیری شرایط موزونی ماتریس G قبول کرد:

$$\varepsilon = \det[G] - \det[G_{ii}] \quad (۲٥)$$

که G_{ii}؛ ماتریس قطری مرکب از درایه‌های قطر ماتریس G می‌باشد وdet ؛ معنی دترمینان را می‌دهد. مقادیر ε نزدیک صفر برای یک ماتریس با شرایط موزونی ایده‌آل می‌باشد. بنابراین، عدد شرایط موزونی PDET به شرح زیر استفاده می‌شود:

$$PDET = \det[G] / \det[G_{ii}] \quad (۲٦)$$

برای یک ماتریس با شرایط موزونی ایده آل PDET نزدیک واحد است؛ کاوه [38] .

گراف وزن دار و عضو مجاز. سختی (یا نرمی) نسبی اعضاء یک سازه را می‌توان به عنوان اعداد صحیح مثبت مربوط به اعضاء گراف مدل یک سازه مورد بررسی قرار داد که یک گراف وزن دار را نتیجه می‌دهد؛ کاوه [38] .

S را مدل یک سازه‌ی قابی در نظر بگیرید و K_{mi} به عنوان ماتریس سختی عضو m_i در سیستم مختصات اصلی انتخاب شده برای سازه تعریف می‌شود. وزنی را برای m_i می‌توان با استفاده از عنصرهای قطری k_{ii} از k_{mi} تعریف کرد:

$$W(m_i) = \sum k_{ii} = 2(\alpha_1 + \alpha_4^z + \alpha_3^z)$$

$$W(m_i) = \sum k_{ii}^{1/2} = 2\left[(\alpha_1)^{1/2} + (\alpha_4{}^z)^{1/2} + (\alpha_3^z)^{1/2}\right] \quad (۲۷)$$

$$\alpha_1 = \frac{EA}{L},\ \alpha_4^z = \frac{12EI}{L^3},\ \alpha_3^z = \frac{4EI}{L} \quad (۲۸)$$

در تعریف دیگری می‌توان مجموع ریشه‌ی دوم عنصرهای قطری K_{mi} را به کار برد.توابع دیگری نیز برای نمایش سختی نسبی اعضاء S می‌توان تعریف کرد.

تعریف: فرض کنید وزن اعضاء m_1 , m_2 , ... , $m_{M(s)}$ به ترتیب با $W(m_{M(S)}),...,W(m_2),W(m_1)$ تعریف می‌شود. عضو m_i یک عضو(F- admissible) نامیده می‌شود، اگر:

$$W(m_i) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{M(s)} W(m_j) / M(S) \quad (۲۹)$$

که α یک عدد صحیح است و می‌تواند ۲، ۳ و ... فرض شود که ما α را برابر ۲ در نظر می‌گیریم. به هر حال، یک مطالعه‌ی کامل برای مقادیر دیگر α لازم است. اگر یک عضو مجاز نباشد، غیر مجاز یا S- مجاز (S- admissible) نامیده می‌شود.

تعاریفی از تئوری گراف‌ها

یک گراف، شامل یک مجموعه N(S) از اجزایی موسوم به گره (نقطه‌ها یا رأس‌ها) و یک مجموعه M(S) از اجزایی موسوم به اعضا (پاره‌خط‌ها یا منحنی‌ها) است که هر عضو با یک جفت گره که انتهای آن نامیده می‌شود، مربوط است؛ کاوه [38].

اگر دو یا چند عضو متصل به گره‌های یکسان باشند به آن‌ها اعضا مضرب می‌گوییم و یک عضوی که دو انتهای آن به یک گره متصل باشد، حلقه نامیده می‌شود.

گرافی که حلقه و اعضاء مضرب ندارد، گراف ساده نامیده می‌شود. اگر N(S) و M(S) قابل شمارش باشند، گراف مربوطه محدود نام می‌گیرد. گراف‌های به‌کار رفته به‌عنوان مدل ریاضی سیستم در سازه‌ها گراف ساده محدود می‌باشند. دو گره از یک گراف را همسایه

می‌نامند. هرگاه این گره‌ها در دو انتهای یک عضو واقع شده باشند، یک عضو متلاقی با یک گره خواهد بود. اگر آن گره، یکی از گره‌های انتهای عضو باشد، یک زیرگراف S_i از S خود گرافی است که $M(S_i) \subseteq M(S), N(S_i) \subseteq N(S)$ است و گره‌های انتهایی هر عضو از S_i همان گره‌های انتهایی در گراف S می‌باشد. یک گام P_k از S یک رشته‌ی محدود $P_k = \{n_0, m_1, n_1, ..., m_p, n_p\}$ است که جمله‌های آن متناوباً گره‌های n_i و اعضا m_i از S برای $1 \le i \le p$ است و n_{i-1} و n_i دو انتهای m_i می‌باشد.

مسیر با عضو تکراری گامی است که هیچ عضوی از *S* بیشتر از یک بار در آن ظاهر نشود. طول مسیر P_i با $L(P_i)$ نشان داده می‌شود و برابر تعداد اعضای آن است. P_i کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره n_i و n_p است. اگر برای هر مسیر P_j دیگری بین این گره‌ها $L(P_i) \le L(P_j)$ باشد، فاصله بین دو گره از یک گراف تعداد اعضا کوتاه‌ترین مسیر بین این دو گره است. اگر یک مسیری بین آن‌ها موجود باشد، به دو گره n_i و n_j متصل گفته می‌شود. گراف S اگر همه جفت گره‌های آن به هم متصل باشد، گراف یکپارچه و در غیر این صورت گراف چند پارچه نامیده می‌شود.

تعداد پارچه‌های گراف S حداکثر زیرگراف‌های یکپارچه آن است. یک چرخه مسیری است $(n_0, m_1, n_1, ..., m_p, n_p)$ که $n_0 = n_p$ و $p \ge 1$ می‌باشد؛ یعنی چرخه یک مسیر بسته است. به طور مشابه یک چرخه با گره تکراری بسته (چرخه لولادار) و یک گام بسته را می‌توان تعریف کرد. درخت T از S یک زیرگراف متصل از S است که شامل چرخه نباشد. یک مجموعه از درختان S یک جنگل را تشکیل می‌دهند. اگر یک درخت، شامل تمامی گره‌های S باشد، درخت گسترنده نامیده می‌شود. برای سادگی به آن به‌عنوان یک درخت اشاره می‌شود. درخت کوتاه‌ترین مسیر SRT از یک گره مشخص n_0 ریشه می‌گیرد و درختی است که فاصله‌ی بین هر دو گره n_j و n_0 کمینه است. دو فضای برداری به گراف S ارتباط داده می‌شود. این فضاها عبارتند از: فضای چرخه و فضای مجموعه برشی.

با این که فضاهای برداری را می‌توان روی یک میدان دلخواه تشکیل داد، برای سادگی، میدان از مدول صحیح ۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن 1+1=0.

فضای مجموعه چرخه‌ای. حال یک بردار مجموعه چرخه‌ای را بررسی می‌کنیم. مجموعه‌ی تهی نیز به‌عنوان یک عضو در نظر گرفته می‌شود. می‌توان نشان داد که جمع دو بردار مجموعه چرخه‌ای از یک گراف نیز یک بردار مجموعه چرخه‌ای است. بنابراین بردارهای مجموعه چرخه‌ای، یک فضای برداری می‌باشد که بعد آن برابر است با:

$$\mathrm{rank}(S) = b_1(S) = M(S) - N(S) + b_0(S) \qquad (۳۰)$$

پایه‌های چرخه‌ای اساسی. برای فضای مجموعه چرخه‌ای می‌توان یک پایه تشکیل داد. به درخت *T* و همراه درخت T^* توجه کنید. زیرگراف S که مرکب از همراه درخت‌ها می‌باشد و هر عضو T^* (وتر) یک مجموعه چرخه‌ای که به‌عنوان مجموعه چرخه‌ای اساسی شناخته می‌شود را تشکیل می‌دهد. مجموعه‌ای از مجموعه‌های چرخه‌ای که با اضافه کردن شاخه‌های T^* به T تهیه می‌شوند، با هم پایه‌ای را برای فضای مجموعه چرخه‌ای S تشکیل می‌دهد که به‌عنوان پایه چرخه‌ای اساسی S شناخته می‌شود.

ماتریس‌های پایه‌های چرخه‌ای. ماتریس تلاقی عضو–مجموعه چرخه‌ای، $\overline{C}$ برای یک گراف، S یک سطر به ازای هر مجموعه چرخه‌ای S، و یک ستون به ازاء هر عضو دارد. درایه $\overline{C}_{ij}$ از $\overline{C}$ برابر ۱ است. اگر مجموعه چرخه‌ای $\overline{C}_i$ شامل عضو m_j باشد و در غیر این صورت برابر صفر است. سطرهای مستقل $\overline{C}$ برای یک پایه برشی با C نشان داده می‌شود و ماتریسی با عنوان ماتریس تلاقی پایه چرخه‌ای تشکیل می‌دهد که یک ماتریس $b_1(S) \times M$ است. ($b_1(S)$ رتبه گراف را نشان می‌دهد). ماتریس همسایگی مجموعه چرخه‌ای

$D = CC^t$ یک ماتریس $b_1(S)\times b_1(S)$ است اگر C_i و C_j یک عضو مشترک داشته باشند، هر درایه d_{ij} آن برابر ۱ است؛ و درغیر این‌صورت، برابر صفر است؛کاوه [38] .

الگوریتم‌هایی برای تشکیل پایه چرخه‌های نزدیک به بهینه

در این بخش دو الگوریتم برای انتخاب پایه چرخه‌هایی با شرایط موزونی نزدیک به بهینه یک گراف وزن‌دار شرح داده می‌شود. در هر چرخه‌ی انتخاب شده، سه یا شش (S.E.Ss) مربوط به S که به ترتیب از یک قاب مستوی یا فضایی می‌باشد، تشکیل می‌گردد؛ کاوه [37-38] .

الگوریتم اول. مرحله‌ی ۱: از یک عضو گراف یک چرخه‌ای با طول مینیمم و وزن ماکزیمم ایجاد می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲: مرحله‌ی اول را برای تمامی اعضای گراف انجام می‌دهیم؛ یعنی از تمامی اعضای گراف مورد نظر چرخه‌ای می‌اندازیم که در حین مینیمم بودن طول چرخه، ماکزیمم وزن را نیز داشته باشد.

(از دو انتهای عضو SRT با وزن ماکزیمم به‌صورت هم‌زمان تولید می‌کنیم و به محض این‌که دو SRT با ماکزیمم وزن همدیگر را قطع می‌کنند، با یک مسیر (Path) به دو انتهای عضو مورد نظر برمی‌گردیم. عضو مورد نظر و دو مسیرایجاد شده، تشکیل چرخه مینیمم را می‌دهند؛ بدین صورت، یک چرخه با طول مینیمم و وزن ماکزیمم تولید می‌کنیم.)

طرز تشکیل SRT ماگزیمم به‌صورت زیر است:

الف) تمام اعضایی که با 0 تلاقی دارند را در نظر بگیرید و عدد ۱ را برای انتهای دیگرشان اختصاص دهید.

ب) تمام اعضایی که با گره‌های مشخص شده با عدد ۱ تلاقی دارند را بیابید و آن‌ها را به طور صعودی بر حسب وزنشان مرتب کنید.

ج) اعضاء درختی را از اعضاء مرتب شده‌ی بالا انتخاب کنید و عدد ۲ را برای انتهای دیگرشان اختصاص دهید.

مرحله‌ی (ج) را تا زمانی ادامه می‌دهیم که دو SRT همدیگر را قطع کنند.

مرحله ۳: بعد از این‌که مرحله‌ی ۲ را به اتمام رساندیم و از تمام اعضاء گراف یک چرخه با طول مینیمم و وزن ماکزیمم تولید کردیم، وزن هر چرخه را به دست می‌آوریم. (وزن یک چرخه به‌صورت مجموع وزن اعضای آن به دست می‌آید.)

مرحله‌ی ٤: چرخه‌های به دست آمده را به‌صورت صعودی وزن در یک مجموعه مرتب (order) می‌کنیم. در واقع چرخه‌های به‌دست آمده را (sort) می‌کنیم.

مرحله‌ی ٥: از الگوریتم گریدی (Greedy Algorithm) استفاده می‌کنیم و چرخه‌های مورد نیاز را تا وقتی که $b_1(S)$ تا چرخه‌ی مستقل به دست آید، انتخاب می‌کنیم. (از الگوریتم گریدی ابتدا یک چرخه با ماگزیمم وزن از مجموعه مرتب (order) شده‌ی مرحله‌ی ٤ انتخاب می‌کنیم و سپس چرخه‌ی بعدی با وزن ماگزیمم از مجموعه‌ی باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم که مستقل از چرخه‌ی به‌دست آمده‌ی اولی است و مرحله‌ی پنجم را تا زمانی که $b_1(S)$ تا چرخه‌ی تشکیل شود، ادامه می‌دهیم. بدین ترتیب، یک پایه‌ی چرخه با شرایط موزونی نزدیک به بهینه تشکیل می‌گردد.)

الگوریتم دوم. مرحله‌ی ۱: مدل گرافی سازه‌ی مورد نظر راپیدا کرده، سپس از یک عضو گراف مورد نظر، چرخه‌ای با وزن ماگزیمم وطول مینیمم تولید می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲: مرحله‌ی اول را برای تمامی اعضای گراف انجام می‌دهیم؛ یعنی از تمام اعضای گراف مورد نظر، چرخه‌ای می‌اندازیم که در عین مینیمم بودن طول چرخه، ماگزیمم وزن را نیز داشته باشد. البته منظور ما از جمله‌ی بالا این است که بین مینیمم شدن طول چرخه و ماگزیمم بودن وزن چرخه سازشی ایجاد کنیم؛ زیرا نمی شود هم طول چرخه را مینیمم و هم وزن چرخه را ماگزیمم کرد. همان طور که قبلا هم اشاره شد، پیدا کردن الگوریتمی که پرصفرترین وخوش حالت ترین ماتریس را برای ما تولید کند وجود ندارد و ثابت شده که این یک مسأله بهینه

سازی چند منظـوره اسـت و بایـد بـین ایـن دوخاصـیت سازشی ایجاد کنیم؛ یعنی اگر در مساله‌ای پرصفری بـرای ما حائز اهمیت باشد از الگوریتم‌هـایی اسـتفاده کنـیم کـه ماتریس ما را پر صفر می‌کند و برعکس ایـن مـسأله هـم صادق است. (از دو انتهای عضو SRTM بهبـود یافتـه بـا وزن ماکزیمم به‌صورت هـم‌زمـان تولیـد مـی‌کنـیم و بـه محض این‌کـه دو SRTM بهبـود یافتـه بـا مـاکزیمم وزن همدیگر را قطع می‌کنند، با یک مسیر (Path) به دو انتهای عضو مورد نظر برمی‌گردیم. عضو مورد نظـر و دو مـسیر ایجاد شده، تشکیل چرخه‌ی مینـیمم را مـی‌دهنـد؛ بـدین صورت، یک چرخه با طول مینیمم و وزن ماکزیمم تولیـد می‌کنیم.)

طرز تشکیلSRTM بهبود یافته به‌صورت زیر است:

گرهی از آن‌جـا کـه SRTM را قـرار اسـت شـروع کنیم، مشخص کـرده و بـه آن "o" مـی‌گـذاریم و سـپس عضوهایی را که بـا "o" تلاقـی دارنـد مـشخص کـرده و سپس متوسط وزن عضوهای متقـاطع بـا "o" را محاسـبه می‌کنیم. سپس اعضایی که وزنشان کم‌تر از وزن متوسـط عضوهاست (عـضوهای متقـاطع بـا "o") از شـاخه‌هـای درخت SRTM شدن محـروم مـی‌کنـیم. در ادامـه، تمـام اعضایی را که با o تلاقی دارند در نظر بگیرید و عدد ۱ را بـرای انتهـای دیگرشـان اختـصاص دهیـد. سـپس تمـام اعضایی را که با گره‌های مشخص شده با عـدد ۱ تلاقـی دارند بیابید و آن‌ها را به طور صعودی بر حسب وزنـشان مرتب کنید. در ادامه، اعضاء درختی را از اعـضای مرتـب شده بالا انتخاب کرده و عدد ۲ را برای انتهای دیگرشـان اختصاص دهید. سـپس بـرای گـره‌هـایی کـه بـا عـدد ۱ مشخص شده است نیز متوسط وزن اعضای درختـی بـالا را به دسـت مـی‌آوریـم و اعـضایی کـه وزنـشان از وزن متوسط به دسـت آمـده کمتـر اسـت را از SRTM شـدن حذف می‌کنیم. سپس این عملیات را برای گره ۲ و سـایر گره‌های گراف انجام می‌دهیم تا این‌که SRTM ما تشکیل گردد.

مرحله‌ی ۳: مرحله‌ی دوم را بـرای تمـام اعـضای گـراف انجام می‌دهیم و از تمام اعضای گراف یک چرخه با طول مینیمم و وزن ماگزیمم تولید کردیم.

سپس وزن هر چرخه را به دسـت مـی‌آوریـم. (وزن یک چرخه به‌صورت مجمـوع وزن اعـضاء آن بـه دسـت می‌آید.)

مرحله‌ی ٤: چرخـه‌هـای بـه دسـت آمـده را بـه‌صـورت صعودی وزن در یک مجموعه مرتب می‌کنیم.

مرحلـه‌ی ٥: از الگـوریتم گریـدی (Greedy Algorithm) استفاده می‌کنیم و چرخه‌های مورد نیـاز را تـا وقتـی کـه $b_1(S)$ تا چرخه مستقل به دست آید، انتخاب می‌کنیم. (از الگوریتم گریدی ابتـدا یـک چرخـه بـا مـاگزیمم وزن از مجموعـه مرتـب (order) شـده‌ی مرحلـه‌ی ٤ انتخـاب می‌کنـیم و سـپس چرخـه‌ی بعـدی بـا وزن مـاگزیمم از مجموعه‌ی باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم که مستقل از چرخه به دست آمده‌ی اولی است ومرحله‌ی پنجم را تـا زمـانی که $b_1(S)$ تا چرخه تشکیل شود، ادامـه مـی‌دهـیم. بـدین ترتیب، یک پایه چرخه با شرایط موزونی نزدیک به بهینه تشکیل می‌گردد.)

نمونه مثال ها

به منظور بررسی کارایی الگوریتم‌هـای ارائـه شـده بـرای الگوریتم‌های اول ودوم ارائه شده با زبـان برنامـه نویـسی جاوا (JAVA) برنامه به‌صورت ویژوال نوشته شده اسـت وخوش حالتی این دو الگوریتم با یکدیگر مقایـسه شـده است. شکل ویژوال برنامه به‌عنـوان نمونـه در شـکل (۲) نمایش داده شده است.

مثـال ۱: یـک قـاب ۳ طبقـه‌ی ٤ دهانـه در شـکل (٤) ملاحظه شـده اسـت. سـه حالـت بـا اسـتفاده از دو نـوع خاصیت عضو مطالعه می‌گردد:

$A_1=0.00106\ m^2$ $I_1=0.00000171\ m^4$ $E=2.1\times 10^7\ t/m^2$

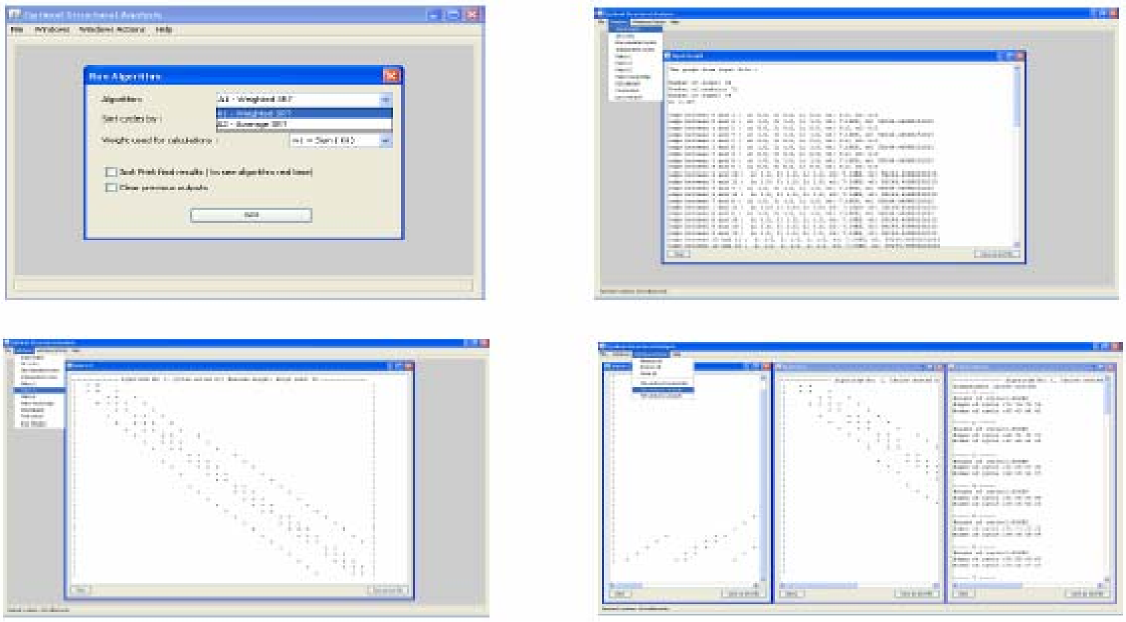
$A_2=0.00970\ m^2$ $I_2=0.00019610\ m^4$ $E=2.1\times 10^7\ t/m^2$

برای تمامی عضوهای سازه‌ی طـول، یعنـی L=3m قرار داده شده است.

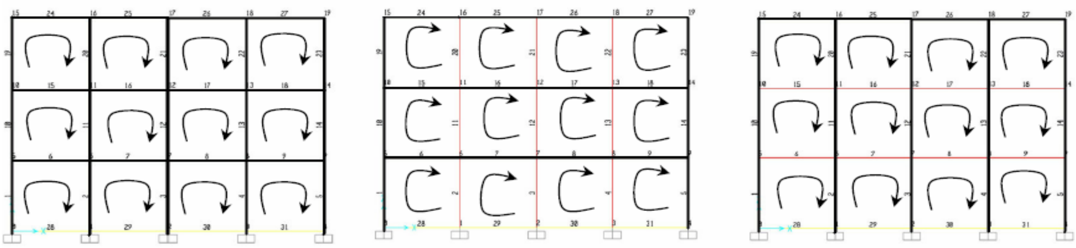
مثال ۲: یک قاب ۳ طبقه‌ی ۳ دهانه در شکل (۷) ملاحظه شده است. سه حالت با استفاده از دو نوع خاصیت عـضو مطالعه می‌گردد:

$A_1=0.00106\ m^2$ $I_1=0.00000171\ m^4$ $E=2.1\times 10^7\ t/m^2$

$A_2=0.00970\ m^2$ $I_2=0.00019610\ m^4$ $E=2.1\times 10^7\ t/m^2$

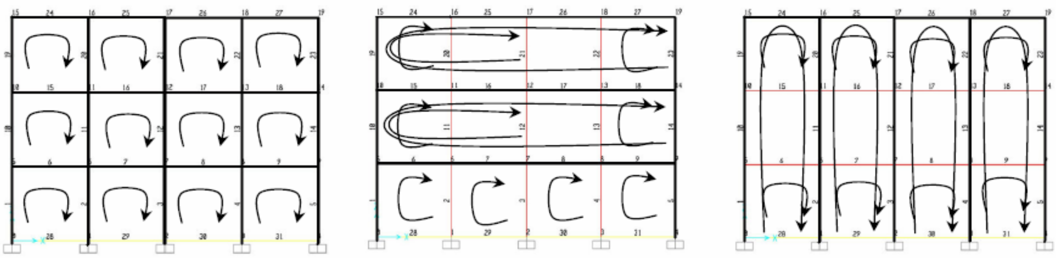


شکل ۳ شمای برنامه‌ی به ویژوال در آمده



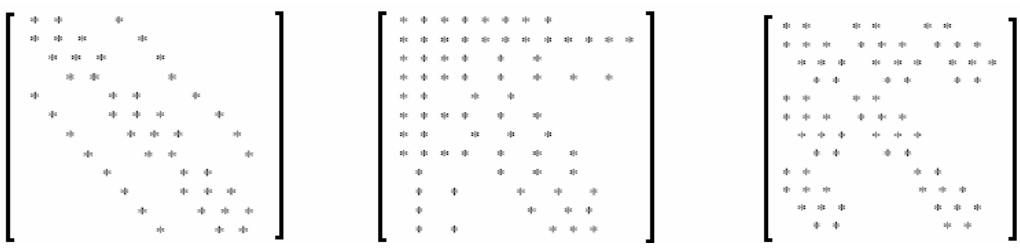
(a) (b) (c)

شکل ٤ قاب‌های سه طبقه، چهار دهانه با انواع مختلف اعضاء و چرخه‌های انتخاب شده توسط الگوریتم دوم



(d) (e) (f)

شکل ۵ قاب‌های سه طبقه، چهار دهانه با انواع مختلف اعضاء و چرخه‌های انتخاب شده توسط الگوریتم اول



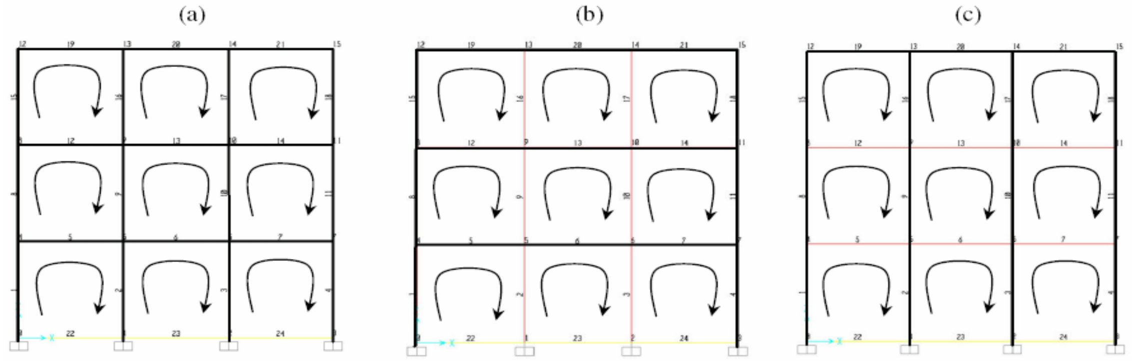
شکل ٦ ماتریس‌های هم الگوی ماتریس نرمی سازه برای شکل (٤)

جدول ۱ اعداد شرایط موزونی با الگوریتم اول

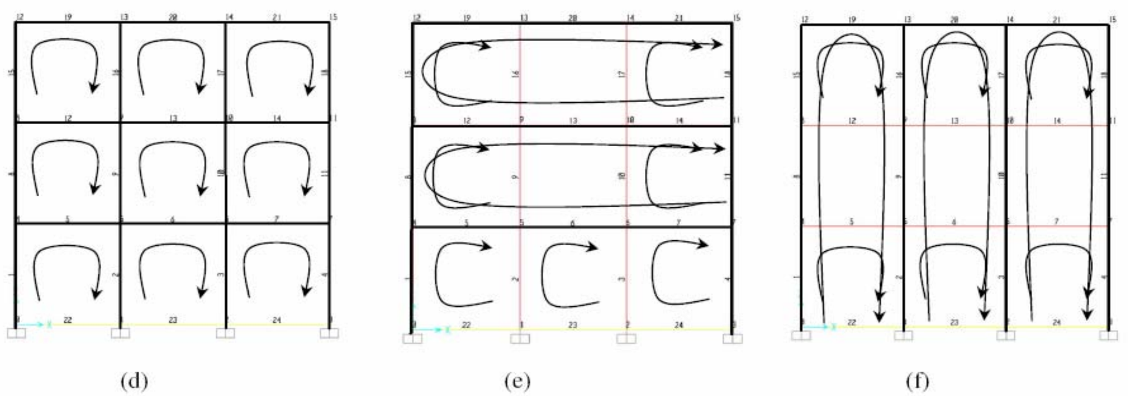
TYPE	PL	PN	PDET	X(D)
(a)	3.452154	6.381245E-29	7.134199E-20	46
(b)	4.852145	0	0	46
(c)	4.479986	0	0	46

جدول ۲ اعداد شرایط موزونی بهبود یافته با الگوریتم دوم

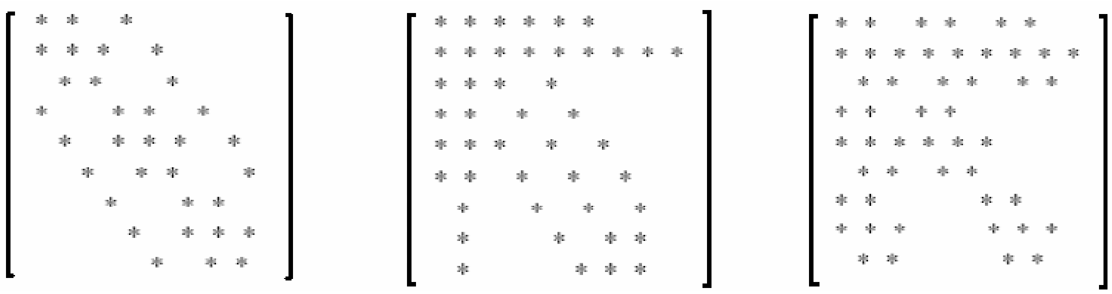
TYPE	PL	PN	PDET	X(D)
(d)	3.452154	6.381245E-29	7.134199E-20	46
(e)	4.342158	2.063098 E-42	3.613358E-31	74
(f)	3.985745	8.307591E-41	3.737124E-30	70



شکل ۷ قاب‌های۳ طبقه،۳ دهانه با انواع مختلف اعضاء و چرخه‌های انتخاب شده توسط الگوریتم اول



شکل ۸ قاب‌های۳ طبقه،۳ دهانه با انواع مختلف اعضاء و چرخه‌های انتخاب شده توسط الگوریتم دوم



شکل ۹ ماتریس‌های هم الگوی ماتریس نرمی سازه برای شکل (۸)

جدول ٣ اعداد شرایط موزونی با الگوریتم اول

TYPE	PL	PN	PDET	X(D)
(a)	3.172154	5.7325461E-21	2.214527E-14	33
(b)	4.632548	0	0	33
(c)	4.3210656	6.91879E-40	3.524312E-31	33

جدول٤ اعداد شرایط موزونی بهبود یافته با الگوریتم دوم

TYPE	PL	PN	PDET	X(D)
(d)	3.172154	5.7325461E-21	2.214527E-14	33
(e)	4.125478	3.245248E-34	4.572541E-26	45
(f)	3.82671452	9.1922013E-30	1.6848295E-21	49

برای تمامی عضوهای سازه‌ی طول، یعنی L=3m قرار داده شده است.

برای مثال اول، چرخه‌های به‌دست آمده از الگوریتم اول در شکل (٥) و همچنین چرخه‌های به‌دست آمده از الگوریتم دوم در شکل (٤) و ماتریس‌های هم الگوی ماتریس نرمی سازه با الگوریتم دوم در شکل (٦) نشان داده شده‌اند. هم‌چنین در جداول (١) و (٢) نتایج حاصل از الگوریتم‌ها به منظور سنجش خوش وضعی ماتریس‌های سازه‌ای داده شده‌اند.

برای مثال دوم نیز مانند مثال اول، چرخه‌های به‌دست آمده از الگوریتم اول در شکل(٧) وهم‌چنین چرخه‌های به‌دست آمده از الگوریتم دوم ارائه شده در شکل(٨) و ماتریس‌های هم الگوی ماتریس نرمی سازه با الگوریتم دوم در شکل (٩) نشان داده شده‌اند. هم‌چنین در جداول (٣) و (٤) نتایج حاصل از الگوریتم‌ها به منظور سنجش خوش وضعی ماتریس‌های سازه‌ای داده شده‌اند.

نتیجه‌گیری

برای هر سازه رشته‌ای می‌توان یک مدل گرافی انتخاب کرد و مسأله‌ی تحلیل بهینه سازه‌ای را به یک مسأله‌ی بهینه‌سازی ترکیباتی تبدیل کرد. هم الگویی بین ماترس‌های سازه‌ای و ماتریس‌هایی که با مدل گرافی سازه هم‌بست شده‌اند، اساس اصلی تغییر مسائل تحلیل بهینه سازه‌ای به مسائل بهینه سازی توپولوژیکی است. درمثال‌های ارائه شده نشان داده شده است که می‌توان با ارائه‌ی الگوریتم‌های مناسب خوش حالتی (شرایط) ماتریس‌های سازه‌ای را بهبود بخشید. در مثال‌ها دیده شد که خوش حالت شدن ماتریس نرمی، باعث به وجود آمدن غیرصفرهایی در ماتریس هم الگو با ماتریس نرمی و در نهایت خود ماتریس نرمی می‌گردد و این جریمه‌ای است که باید ماتریس در قبال خوش حالت شدنش بپردازد. بنابراین می‌توان گفت، خوش حالت کردن ماتریس نرمی و هم‌زمان پرصفر کردن ماتریس نرمی، یک مسأله‌ی بهینه سازی چند منظوره است و باید سازشی بین این دو خاصیت ایجاد شود.

مراجع

1. Kaveh, A., "Optimizing the conditioning of structural flexibility matrices", Comput. Struct., 41, pp. 489-494, (1991).
2. Kaveh, A., And Ghaderi, I., "Conditioning of structural stiffness matrices", Comput. Struct., 63, pp. 719-725, (1997).
3. Shah, J.M., "Ill-conditioned stiffness matrices", *J. Struct. Div., ASCE,* 92, pp. 443-457(1966).
4. Rosanoff, R.A. And Ginsburg, T.A., "Matrix error analysis for engineers", *Proc. Conf., Matrix Meths. Struct.* Mech., AFFDL-TR-68-150, Wright Patterson Air Base, Ohio, 1968, pp. 1029-1060.
5. Grooms, H. R. And Rowe, J., "Substructuring and conditioning", *J. Struct. Div., ASCE,* 103, pp. 507-514(1977).
6. Filho, F. V., "Orthognalization of internal force and strain systems", *Proc. Conf. Matrix. Struct.* Mech., AFFDL-TR-68-150, Wright Patterson Air Base, Ohio, pp. 385-391, (1968).
7. Robinson, J. And Haggenmacher, G. W., "Some new development in matrix force analysis", In Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Univer. Alabama, pp.183-228, (1971).
8. Henderson, J. C., de C."Topological aspects of structural analysis", Aircr.Engng., 32, pp. 137-141, (1960).
9. Maunder, E. W .A., "Topological and linear analysis of skeletal structures" , Ph.D. thesis , Lond. Univer. , IC, (1971).
10. Kaveh, A., "Application of topology and matroid theory to the analysis of acructures", Ph.D. thesis, Lond. Univer., IC, March (1974).
11. Kaveh, A.," Improved sysle bases for the fiexibility analisys of structures", Comput. Meths appl .Mech. Engng, 9, pp. 267-272(1976).
12. Denke, P. H., "A general digitall computer analysis of statically indeterminte structures", NASA-TD-D-1666, (1962).
13. Robinson, J., " Integrated Theory of Finite Element Methods", John Wiley, NewYork, (1973).
14. Topcu, A., "A contribution to the systematic analysis of finite element structures using the force method" (in German), Doctoral dissert., Essen Univer., (1979).
15. Kaneko, I., Lawo, M. and Thieriuf, G., "On computational procedures for the force methods", Int. Numer. Meth. Engng., 18, pp. 1469-1495(1982).
16. Gilbert, J.R., and Heath, M. T., "Computing a sparse basis for the nullspace", *SIAM J. Alg. Disc. Meth.,* 8, pp. 446-459(1987).

17. Pothen, A.,"Sparse null basis computation in structural optimization", Numerische Mathematik, 55, pp. 501-519(1989).
18. Colman, T. F., and Pothen, A., "The null space problem I"; *Complexity, SIAM J. Alg. Disc. Meth.* , 7, pp. 527-537(1986) .
19. Colman, T. F., and Pothen, A., "The null space problem II"; *Complexity, SIAM J. ALg. Disc. Meth.*, 8, pp. 544-561(1987).
20. Patnaik, S. N., "Integrated force method versus the standard force method", Comput. Struct., 22, pp. 151-164(1986).
21. Patnaik, S. N., "The variational formulation of the integrated force method", *AIAA J.* 24, pp. 129-137(1986).
22. Patnaik, S. N., and Yadgiri, S., "Frequency analysis of structures by integrated force method", *J. Sound. Vib.*, 83, pp. 93-109(1982).
23. Hubicka, E. And Syslo, M., "Minimal bases of cycles of e graph", Recent Advances in Graph Theory. Academic Press, pp. 283-293(1975).
24. Cassell, A. C.,Henderson, J.C., de C. and Kaveh, A., "Cycle bases for the flexibility Analysis of structures", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 8, pp. 521-528(1974).
25. Kaveh, A., "An efficient program for generating subminimal cycle bases for the flexibility analysis of structures". Commun. Appl. Numer. Meth. 2, pp. 339-344(1986).
26. Kaveh, A., "Subminimal cycle bases for the force method of structural analysis". Commun. Appl. Numer. Meth. 3, pp. 277-280(1987).
27. Kaveh, A., "Ordering for bandwidth reduction". Comput. Struct. 24, pp. 413-420(1986).
28. Kaveh, A., "A connectivity coordinate system for nodal and element ordering". Comput. Struct., in press(1991).
29. Kaveh, A.," Suboptimal cycle bases of graphs for the flexibility analysis of Skeletal structures", Comput. Meths Appl. Mech. Engng., 71, pp. 259-271(1988).
30. Kaveh, A., "On optimal cycle bases of graphs for mesh analysis of networks". *Int. J. Networks 19*, pp. 273-279(1989).
31. Kaveh, A., "On minimal and optimal cycle bases of graphs for sparse flexibility matrices". ZAMM 69, pp. 212- 214(1989).
32. Stepanec, G. F., "Basis systems of vector cycles with extermal properties in graphs", Uspekhi. Math. Nauk., 19, pp. 171-175(in Russian) (1964).
33. Zykov, A. A., "Teory of Finite Graphs" , Nuaka Novosibirsk, (in Russian) (1969).

34. Kaveh, A., "A combinatorial optimization problem;Optimal generalized cycle bases", Comput. Meths Appl. Mech. Enqnq., 20, pp. 39-52(1979).
35. Kolasinska, E.," On a minimun cycle basis of a graph", Zastos. Math.,16 (1980)631-639.
36. Horton, J. D., "A polynomial time algorithm to find the shortest cycle basis of a graph", *SIAM J. Compur.*, 16, pp. 358-366(1987).
37. Kaveh, A., "Optimal Structural Analysis (2nd edn)". Wiley (RSP): Somerset, U.K., (2006).
38. Kaveh, A., Structural Mechanics: "Graph and Matrix methods", RSP, London , (1992).